# Study of the eigenvalues of Sturm-Liouville problems under perturbations

Octavia-maria, hapenciuc

Universitatea transilvania din brașov

Facultatea de Matematică și Informatică

Specializarea: Structuri Matematice Fundamentale

Email: codrinamaria09@gmail.com

**coordonator:**

Prof. Univ. Dr. Marin Marin

Email: m.marin@unitbv.ro

Universitatea Transilvania din Brașov.

**Abstract**

This research paper aims to investigate how the eigenvalues of Sturm-Liouville problems behave when the differential equation or coefficients are subjected to perturbations. Specifically, the study seeks to examine the continuity of eigenvalues concerning these perturbations.

The research involves theoretical analysis, numerical simulations using Python and MATLAB programming languages, and potential development of new mathematical techniques to characterize the behavior of eigenvalues.

**Keywords:** eigenvalues, eigenfunctions, perturbations, potetial function, differential equations.



## Introducere

## În această lucrare studiem problemele regulate Sturm-Liouville cu condiții la limită auto-adjuncnte. Există două metode de bază disponibile pentru astfel de studii: teoria operatorilor și teoria funcțiilor complexe. În această lucrare este utilizată teoria operatorilor pentru a da estimări mai bune ale autovalorilor problemelor Sturm-Liouville atunci când perturbăm funcția potential.

## Secțiunea preliminară

Pornind de la rezultatele lui P. Kosowski din [6] și [8], generalizăm rezultatele principale ale acestor articole pentru probleme Sturm–Liouville de forma următoare

 [[1]](#X86a6a7bbe6a4ae5c1502558f013f6ed6b9ae6f2)

cu condițiile la limită

unde.
Vom presupune că lucrăm pe mulțimea numerelor reale și că sunt satisfăcute următoarele proprietăți:

1. este continuu diferențiabilă pe și

2. este o funcție continuă pe

3. este continuu diferențiabilă pe și

4. și .

Considerăm mulțimea

Pentru considerăm operatorii

 [[2]](#X86a6a7bbe6a4ae5c1502558f013f6ed6b9ae6f2)

unde și sunt în .

Fie autovaloarea de ordinul a primei probleme și autovaloarea de ordinul a celei de-a doua probleme.

## Rezultate principale

**Teorema 1.** Dacă || atunci .

*Demonstrație.* Avem pentru fiecare din . Este suficient să luăm în considerare doar una dintre inegalități, de exemplu, cea din dreapta , .
Este binecunoscut faptul că fiecare valoare proprie a problemei Sturm–Liouville satisface principiul minmax al lui Poincaré, care afirmă că

unde reprezintă orice subspațiu k-dimensional al lui D, iar este raportul lui Rayleigh pentru prima problemă considerată, adică,

unde și.

Integrând prin părți calculăm

Condițiile la limită sunt normale și separate, deci problema este bine definită. Mai precis, dacă notăm , atunci termenul poate fi exprimat astfel ca , unde constantele A, B sunt reale, de unde

Similar obținem că , de unde . Acest lucru completează demonstrația. ◻

**Corolarul 1.** Presupunem că funcția din problema neperturbată din relația [[2]](#X86a6a7bbe6a4ae5c1502558f013f6ed6b9ae6f2) depinde de un parametru cu o constantă Lipschitz , astfel încât , , . Atunci fiecare depinde continuu de cu aceeași constantă Lipschitz.

*Demonstrație.* Pentru și fixați, este suficient să luăm și să aplicăm teorema [Teorema 1](#th6.1), obținând astfel

 ◻

Pentru a simplifica discuția, ajută să presupunem că este un operator pozitiv, ceea ce, conform teoremei Courant-Fischer-Poincare, este echivalent cu a avea o cea mai mică valoare proprie . Aceasta poate fi realizată înlocuind cu , unde este astfel încât ; acest lucru doar deplasează toate valorile proprii în sus cu fără a schimba esențial problema. De acum înainte, facem presupunerea menționată mai sus; astfel, șirul de valori proprii satisface încă o inegalitate:

Să notăm cu operatorul simetric mărginit definit pentru . Începem cu o lemă simplă, ce ne oferă o estimare a normei operatorului pentru eroarea relativă.

**Lemă 1.** Conform presupunerii de mai sus, următoarea inegalitate este valabilă, pentru fiecare

Demonstrație. Din Teorema [Teorema 1](#th6.1) rezultă că

Să observăm că

 ◻

**Teorema 2.** Conform presupunerii de mai sus, următoarea inegalitate este valabilă, pentru fiecare unde reprezintă raza spectrală.

Demonstrație. Este cunoscut faptul că există și este un operator integral cu un nucleu continuu, prin urmare extensia sa pe este compactă. este de asemenea pozitiv definit, deci are rădăcina pătrată unică , care este un operator pozitiv definit. Fie . Este binecunoscut faptul că fiecare valoare proprie a problemei Sturm-Liouville satisface principiul minmax al lui Poincaré, care afirmă că

unde reprezintă orice subspațiu de dimensiune a lui .

Deoarece pentru , putem scrie raportul lui Rayleigh pentru ecuația perturbată astfel:

Este ușor de verificat că

unde este definit ca . Deoarece este și auto-adjunct, avem

ceea ce implică că

Acest lucru ne oferă

Deoarece cu condiția ca și să fie mărginite, vedem că

Din cele de mai sus rezultă că

Aplicând caracterizarea "minmax", deducem că

și astfel

care este estimarea dorită. ◻

**Exemplul 1.** În acest exemplu perturbăm operatorul la operatorul cu aceleași condiții la limită , unde funcția este după cum urmează:

Pentru problema Sturm-Liouville neperturbată avem valorile proprii și funcțiile proprii (unde ). Metoda de calcul rămâne aceeași și rezultatele sunt prezentate în tabelul de mai jos:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| k |  |  |  |  |
| 1 | 1.98691 | 0.98691 | 0.98742 | 1 |
| 2 | 4.95277 | 0.23819 | 0.98742 | 1 |
| 3 | 9.91021 | 0.10113 | 0.98742 | 1 |

**Exemplu 2.** Un contraexemplu care demosntrează necesitatea utilizării normei infinit pentru funcția potențial.

Utilizarea normei nu ne conduce la aceleași rezultate; adică estimarea

unde

nu este valabilă.

Să luăm în considerare două ecuații și pe intervalul , unde și , cu aceleași condiții la limită . Vom calcula o aproximare a celei mai mici valori proprii ale acestor ecuații. Apoi, rezultatele cu acuratețea de 5 zecimale sunt următoarele: , .
Astfel, diferența este mai mare decât .

**Exemplu 3.** Problema lui Schrödinger – Oscilatorul armonic.

Considerăm ecuația oscilatorului armonic

Acest exemplu este un model bun pentru anumite sisteme oscilante din fizică și mecanică.



Fig.1. Autovalorile problemei inițiale și autovalorile problemei perturbate liniar cu factorul 0.5. (Python). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc

**Exemplu 4.** O problemă de dinamică structurală.

Considerăm o coardă uniformă de lungime fixată la ambele capete. Funcția reprezintă deplasarea verticală de-a lungul lungimii sale, iar denote densitatea variabilă a coardei.

Problema Sturm-Liouville care generează vibrația acestei coarde poate fi descrisă de următoarea ecuație diferențială:

unde:

* este modulul de elasticitate al materialului coardei,
* este al doilea moment de arie al secțiunii transversale a coardei,
* este densitatea variabilă a materialului coardei, și
* este parametrul valorii proprii care reprezintă frecvențele naturale ale vibrației.

Condițiile la limită pentru această problemă sunt:

unde și sunt capetele fixate ale coardei.

În acest exemplu, presupunem că densitatea coardei variază liniar de-a lungul lungimii sale, dată de:

unde este densitatea constantă coardei și este un coeficient care reprezintă rata de schimbare a densității pe unitatea de lungime.



Fig. 2. Autovalorile problemei inițiale și ale problemei perturbate cu factorul α=0.5 (Matlab). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc



Fig. 3. Modulul diferenței dintre autovalori (Python). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc



Fig. 4. Autofuncțiile problemei inițiale și ale problemei perturbate cu factorul α=0.5 (Python). Autor: Octavia-Maria Hapenciuc

## Bibliografie

|  |  |
| --- | --- |
| [  | [1] A. Zettl, *"Sturm-Liouville Problems"*, Mathematics Department, Northern Illinois University, DeKalb, Illinois 60115. E. A. Coddington and A. Zettl, *Hermitian and anti-hermitian properties of Green’s matrices.*, Pacific J. Math. 18 (1966), 451-454.[2] J. W. Neuberger, "Concerning boundary value problems", Pacific J. Math. 10 (1960), 1385-1392. A. Zettl, Adjoint and self-adjoint problems with interface conditions., SIAM J. Applied Math. 16, (1968), 851-859. [3] M. S. Robertson, "Adjointness in nonadjoint boundary value problems", SIAM J. Applied Math. 17, (1969), 1268-1279.[4] Q. Kong and A. Zettl, "Linear ordinary differential equations", WSSIAA v.3, (1994), (Special volume dedicated to W.Walter), Inequalities and Applications, edited by R. P. Agarwal, 381- 397.[5] J. Weidmann, "Linear Operators in Hilbert Spaces", volume 68 of Graduate Texts in Marhematics. Springer Verlag, Berlin, 1980.[6] P. Kosowski, "A Simple Proof Of The Spectral Continuity Of The Sturm–Liouville Problem", Symplectic Singularities And Geometry Of Gauge Fields, Banach Center Publications, Volume 39, Institute Of Mathematics, Polish Academy Of Sciences, Warszawa 1997.[7] R. Courant and D. Hilbert, "Methods of Mathematical Physics", vol. 1, Interscience, New York, 1953.[8] P. Kosowski, "A Note On The Relative Error For The Eigenvalues Of The Sturm-Liouville Problem", Demonstratio Mathematica, Vol. XXXII No 2 1999. |