UNIVERSITATEA TEHNICĂ DIN CLUJ-NAPOCA

XGEN R&D

Matrice pozitive

24 noiembrie 2023

Antonia Cosar

CN. "V. Lucaciu", Baia Mare

XGEN R&D

Matrice

XGEN

Definiție (Matrice)

O matrice este un tabel dreptunghiular de numere, sau mai general, de elemente de forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{n2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Definiție (Matrice pătratică)

Dacă numărul de linii este egal cu numărul de coloane, atunci matricea se numește pătratică.

Definiție (Transpusa unei matrice)

Luând liniile matricei A drept coloane (respectiv coloanele drept linii), obținem transpusa matricei A:

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & & & \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definiție (Matrice inversabilă)

Matricea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *este inversabilă dacă există o matrice* $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât să aibă loc relația:*

$$A \cdot B = B \cdot A = \mathcal{I}_n.$$

Matricea B *introdusă se numește inversa matricei* A *și se notează* $B = A^{-1}$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = \mathcal{I}_n.$$

Exemplu

Pentru $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *avem:*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Definiție (Matrice diagonală)

Într-o matrice diagonală, toate elementele din afara diagonalei principale sunt zero. Elementele de pe diagonală pot fi nule sau nenule. Astfel, matricea $A = [a_{ij}]$ cu n linii și m coloane este diagonală dacă:

$$a_{ij} = 0, \forall i \neq j, i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}.$$

Exemplu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 765 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 289 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 94 \end{pmatrix}$$

Definiție (Matrice asemenea)

Două matrice $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *se numesc asemenea dacă există o matrice inversabilă* $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel ca* $A = S^{-1}BS$*. Notăm asemănarea prin* $A \sim B$.

Definiție (Matrice diagonalizabilă)

O matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *este diagonalizabilă dacă ea este asemenea cu o matrice diagonală, adică există o matrice inversabilă* $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *astfel încât* $S^{-1}AS$ *este diagonală.*

Definiție (Valori proprii)

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ este o matrice, atunci polinomul

$$p_A = \det\left(A - X \cdot \mathcal{I}_n\right) \in \mathbb{C}\left[X\right]$$

se numește ***polinomul caracteristic*** *al matricei A.*
Ecuația $p_A(x) = 0$ se numește ***ecuația caracteristică*** *a matricei A.*
Rădăcinile $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ ale ecuației caracteristice se numesc ***valori proprii*** *ale matricei A, iar mulțimea $\{\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$ se numește* ***spectrul matricei*** *A și se notează cu $Spec(A)$.*

Definiție (Raza spectrală)

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ o matrice pătratică. Atunci raza spectrală a matricei A, notată cu $\rho(A)$, este cea mai mare valoare absolută a valorilor sale proprii.

Matrice pozitive

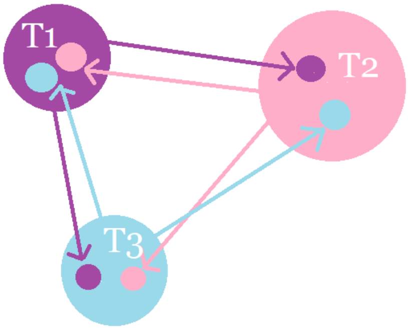
Definiție (Matrice pozitive)

Fie $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$ *și* $B = [b_{ij}] \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$. *Atunci, spunem că*

- $A \geq 0$, *dacă* $a_{ij} \geq 0 \ \ \forall i, j$
- $A > 0$, *dacă* $a_{ij} > 0 \ \ \forall i, j$
- $A \geq B$, *dacă* $A - B \geq 0$
- $A > B$ *dacă* $A - B > 0$.

Se poate defini modulul unei matrice în mod similar cu definiția modulului unui număr real:

- $|A| \geq 0$ *pentru orice* $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$; $|A| = 0$ *dacă și numai dacă* $A = 0$
- $|aA| = |a||A|$ *pentru orice* $a \in \mathbb{C}$
- $|A + B| \leq |A| + |B|$
- *Dacă* $0 \geq A \geq B$ *atunci* $0 \geq A^m \geq B^m$, *pentru orice* $m \in \mathbb{N}$.



Notăm cu a_{ij} *numărul mutat și cu* $c_i^{(m)}$ *numărul rămas în grupa i după ziua m.*

Se verifică recurența:

$$c_i^{(m+1)} = a_{i1}c_1^{(m)} + \ldots + a_{in}c_n^{(m)},\ i = \overline{1,n},\ m \in \mathbb{N}$$

Dacă notăm matricea pătratică de ordin n a coeficienţilor sistemului prin $A = [a_{ij}]$ și distribuţia valorilor în mișcarea de ordin m prin vectorul $c^{(m)} = [c_i^{(m)}]$ atunci:

$$c^{(m+1)} = Ac^{(m)} = A^2 c^{(m-1)} = \dots = A^{(m+1)} c^{(0)}, m \in \mathbb{N},$$

unde $c^{(0)}$ este distribuţia iniţială a valorilor.

$0 \leq a_{ij} \leq 1$ *şi* $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1$, *pentru orice* $j = \overline{1, n}$

Întrebarea este, cum se comportă A^m pentru m foarte mare?

Cazul $n = 2$

Fie matricea noastră

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$a_{11} + a_{21} = a_{12} + a_{22} = 1$, *și notăm* $a_{21} = \alpha$ *şi* $a_{12} = \beta$

Se obține

$$A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \beta \\ \alpha & 1-\beta \end{pmatrix}$$

Calculăm valorile proprii:

$$\lambda_2 = 1, \lambda_1 = 1 - \alpha - \beta.$$

Cum $0 \leq \alpha, \beta \leq 1$, *avem* $\lambda_2 = 1 \geq |\lambda_1| = |1 - \alpha - \beta|$, *deci*

$$1 = |\lambda_2| = \rho(A)$$

şi raza spectrală a matricei A este valoare proprie pentru A.

$\alpha + \beta \neq 0$

Vectorii proprii respectivi sunt $x = [\beta, \alpha]^\tau$ (pentru $\lambda_2 = 1$) și $z = [1, -1]^\tau$ (pentru λ_1), aşa încât în acest caz A este diagonalizabilă şi avem $A = S\Lambda S^{-1}$, unde:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-\alpha-\beta \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} \beta & 1 \\ \alpha & -1 \end{pmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}.$$

α și β nu sunt ambele egale cu 1

$|\lambda_1| = |1 - \alpha - \beta| < 1$ *şi, deci,* $\lambda^m \to 0$ *când* $m \to \infty$. *Astfel, în acest caz avem:*

$$\lim_{m\to\infty} A^m = S\left(\lim_{m\to\infty} \Lambda^m\right) S^{-1} = S\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}$$

Distribuţia la echilibru a valorilor este

$$\lim_{m\to\infty} c^{(m)} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta & \beta \\ \alpha & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1^{(0)} \\ c_2^{(0)} \end{pmatrix} = \frac{1}{\alpha+\beta}\begin{pmatrix} \beta\left(c_1^{(0)} + c_2^{(0)}\right) \\ \alpha\left(c_1^{(0)} + c_2^{(0)}\right) \end{pmatrix}.$$

Cazurile triviale

- *Dacă* $\alpha = \beta = 0$, *avem* $A = I_2$, *cu* $\lim\limits_{m\to\infty} c^{(m)} = c^{(0)}$
- *Dacă* $\alpha = \beta = 1$, *avem* $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Echilibrul mediu:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} A^k = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$$

și

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} p^{(k)} = \frac{c_1^{(0)} + c_2^{(0)}}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Cazul $n = 3$

Fie acum matricea noastră $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3([0, 1])$.

Avem deci $a_{11} + a_{21} + a_{31} = a_{12} + a_{22} + a_{32} = a_{13} + a_{23} + a_{33} = 1$

Fixăm cinci dintre variabile și lăsăm ca matricea A să depindă de un singur parametru $a \in [0, 1]$.

Fie $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - a & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ a & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ *și acum calculăm valorile sale proprii.*

$$p_A(\lambda) = -a\lambda^2 + \frac{5a\lambda}{6} + \frac{a}{6} - \lambda^3 + \frac{7\lambda^2}{6} - \frac{\lambda}{9} - \frac{1}{18}$$

$$(A) = \frac{7}{6} - a, \;\; \det(A) = \frac{1}{18}(3a - 1),$$

Deci, valorile proprii sunt: $\lambda_1 = 1, \;\; \lambda_2 = -\frac{1}{6}, \;\; \lambda_3 = \frac{1}{3} - a.$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{1}{6a-3} & \frac{5}{9a+6} & -1 \\ \frac{2-6a}{6a-3} & \frac{4a+1}{3a+2} & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} - a \end{pmatrix},$$

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \\ \frac{1-6a^2}{6a^2+a-2} & \frac{a-1}{6a^2+a-2} & \frac{6a-1}{3\left(6a^2+a-2\right)} \end{pmatrix}$$

Cum $\Lambda^m = \begin{pmatrix} \left(-\frac{1}{6}\right)^m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3} - a\right)^m \end{pmatrix}$ rezultă că

$$\lim_{m\to\infty} A^m = S\left(\lim_{m\to\infty} \Lambda^m\right) S^{-1} =$$

$$= S \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} S^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{15}{7(9a+6)} & \frac{15}{7(9a+6)} & \frac{15}{7(9a+6)} \\ \frac{3(4a+1}{7(3a+2)} & \frac{3(4a+1}{7(3a+2)} & \frac{3(4a+1}{7(3a+2)} \\ \frac{3}{7} & \frac{3}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

Concluzii

În aceste exemple $\rho(A) = 1$ *și:*

1. *Raza spectrală* $\rho(A)$ *este chiar o valoare proprie, nu numai valoarea absolută a unei valori proprii.*
2. *Vectorul propriu* x *asociat valorii proprii* $\rho(A)$ *poate fi luat cu componente pozitive, chiar strict pozitive când* A *este ireductibilă.*
3. *Dacă toate elementele matricii* A *sunt strict pozitive,* $\rho(A)$ *este valoare proprie simplă de modul maxim.*
4. *Dacă toate elementele matricii* A *sunt strict pozitive, atunci există limita* $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^m$ *și este o matrice de rang* 1 *ale cărei coloane sunt proporţionale cu vectorul propriu* x*.*
5. *În toate cazurile,* $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{1}{m}\right)\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^k$ *există.*

Matrice strict pozitive

Teoremă

Fie $A \in M_n(\mathbb{R})$ *și presupunem că* A *este strict pozitivă. Atunci* $|\lambda| < \rho(A)$ *pentru orice valoare proprie* $\lambda \neq \rho(A)$.

Lemă

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ *o matrice pătratică. Atunci raza spectrală a matricei* A*, notată cu* $\rho(A)$*, este cea mai mare valoare absolută a valorilor sale proprii.*

Lemă

Fie $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *și presupunem că* $A > 0$, $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$ *și* $|\lambda| = \rho(A)$. *Atunci* $(\cos(\theta) - i\sin(\theta))x = |x| > 0$ *pentru un* $\theta \in \mathbb{R}$.

Teoremă (Teorema lui Perron)

Dacă $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ *și* $A > 0$*, atunci*

1. $\rho(A) > 0$;
2. $\rho(A)$ *este valoare proprie a lui* A;
3. *există un vector* $x \in \mathbb{C}^n$ *cu* $x > 0$ *și* $Ax = \rho(A)x$*, vectorul* x *se numește vectorul lui Perron;*
4. $\rho(A)$ *este o valoare proprie algebric simplă a lui* A;
5. $|\lambda| < \rho(A)$ *pentru orice valoare proprie* $\lambda \neq \rho(A)$*, adică* $\rho(A)$ *este unica valoare proprie de modul maxim;*
6. $\left(\frac{1}{\rho(A)}A\right)^m \to L$ *când* $m \to \infty$*, unde avem,* $L = xy^T$*,* $Ax = \rho(A)x$*,* $A^T y = \rho(A)y$*, cu* $x > 0$*,* $y > 0$ *și* $x^T y = 1$.

Concluzii finale

- Matricele pozitive s-au desprins ca ramură de studiu datorită numeroaselor domenii în care valorile utilizate sunt întotdeauna pozitive, cum ar fi studiul probabiltăților, statistica, analiza numerică și multe altele.
- Matricile pozitive sunt un domeniu prea complex pentru a fi elaborat într-o singură lucrare, aceste continuându-și aplicațiile în studiul matricilor primitive, matricilor stochastice șau chiar în ajutorul localizării valorilor proprii.

Bibliografie

Steve Johnson, Roger A. Horn, *Analiza matricială*, Capitolul 8 *Matrice pozitive*; editura *Theta*; București, 2001

Raphael M. Jungers, *The Joint Spectral Radius: Theory and Applications*; Springer Berlin Heidelberg, 2009.

Mulțumesc!