Lagrange Interpolation Formula and Chebyshev Polynomials

Dacian-Dumitru Robu

Joc fals

$1 \rightarrow 2$

$2 \rightarrow 6$

$3 \rightarrow 12$

$4 \rightarrow 20$

$5 \rightarrow ?$

Regula 1: n $\rightarrow n(n+1)$

Reguli *"greșite"*

- Regula 2: n → $\frac{301}{6} \cdot n^4 - \frac{1505}{3} \cdot n^3 + \frac{10541}{6} \cdot n^2 - \frac{7522}{3} \cdot n + 1204$

  5 →1234

- Regula 3: n → $\frac{32598713483}{24} \cdot n^4 - \frac{162993567415}{12} \cdot n^3 + \frac{1140954971929}{24} \cdot n^2 - \frac{814967837063}{12} \cdot n + 32598713483$

  5 → 32598713513

Polinomul de Interpolare Lagrange

- Căutăm o funcție polinomială care să satisfacă
$$f(a_1) = x_1, f(a_2) = x_2, \cdots, f(a_n) = x_n$$
- Formula lui Lagrange:
$$f(X) = \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \ne k}} \frac{X - a_j}{a_k - a_j}$$

XGEN

Problemă

Fie f un polinom cu coeficienții întregi si p un număr prim astfel încât $f(0) = 0, f(1) = 1$ și $f(k)$ dă unul din resturile 0 sau 1 la împărțirea prin p, oricare ar fi k număr natural. Atunci gradul polinomului f este cel puțin $p - 1$.

Presupunem prin absurd contrariul. Atunci gradul lui f este maxim $p - 2$. Acum folosim formula de interpolare a lui Lagrange în felul următor:

$$[x^{p-1}]: f(x) = \sum_{k=0}^{p-1} f(k) \cdot \prod_{\substack{0 \le j \le n \\ j \neq k}} \frac{X - j}{k - j} = \sum_{k=0}^{n} f(k) \cdot \binom{p-1}{k} \cdot (-1)^k$$

Pe de altă parte

$$k! \cdot \binom{p-1}{k} \equiv (p-1)(p-2)\cdots(p-k) \equiv (-1)(-2)\cdots(-k) \equiv (-1)^k \cdot k!\,(mod\ p) \xRightarrow{p\ e\ prim} \binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k (mod\ p)$$

Deci

$$[x^{p-1}]:\ f(x) \equiv \left(\sum_{k=0}^{n} f(k)\right) (mod\ p)$$

Clar imposibil conform ipotezei, deci am ajuns la o contradicție!

Polinoamele Cebâșev

- $T_n(\cos x) = \cos nx$
- $T_n(x) = \cos(n \cdot \arccos(x))$

Exemple:

- $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow T_2(x) = 2x^2 - 1$
- $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x \Rightarrow T_3(x) = 4x^3 - 3x$
- $\cos 4x = 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1 \Rightarrow T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

De unde știm că polinoamele Cebâșev există?

- Pur și simplu din formula de recurență

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x)$$

- Definim

$$\|f\| = \max_{|x|\le 1}|f(x)|$$

Teoremă (Cebâșev)

Fie f un polinom de grad n cu coeficienți reali și coeficientul dominant $a_n > 0$. Atunci

$$\|f\| \geq \frac{a_n}{2^{n-1}}$$

Egalitatea poate fi atinsă dacă $f(x) = \frac{a_n}{2^{n-1}} T_n(x)$.

Problemă

Se dă funcția

$$\boldsymbol{F(a,b,c)=\max_{x\in[0,3]}\left|x^3-ax^2-bx-c\right|}$$

Să se afle valoarea minimă a lui $\boldsymbol{F}$ în $\mathbb{R}^3$.

Definim funcțiile $f_{a,b,c}(x)=x^3-ax^2-bx-c$, $\varphi(x)=\frac{3(x+1)}{2}$ și $g_{a,b,c}=f_{a,b,c}\circ\varphi$. Atunci

$$F(a,b,c)=\|g_{a,b,c}\|$$

Dar $g_{a,b,c}$ este un polinom de grad 3 cu coeficientul dominant $\frac{27}{8}$. Deci din teorema lui Cebâșev obținem

$$F(a,b,c)\geq\frac{\frac{27}{8}}{4}=\frac{27}{32}.$$

Egalitatea este atinsă când

$$f_{a,b,c}=\frac{27}{32}T_3\left(\frac{2x}{3}-1\right)$$

Rezultate interesante

În continuare considerăm f și g polinoame de grad n cu coeficienți complecși

- (Rogosinski) Dacă $\|f\| \leq 1$ atunci

$$\left|f^{(k)}(x)\right| \leq \left|T_n^{(k)}(x)\right|, \forall\, |x| \geq 1, k \in \mathbb{N}$$

- (Bernstein)

$$\|f'\| \leq n \cdot \|f\|$$

- (Gelfand)

$$\|f\| \cdot \|g\| \leq 4^{grad\, f + grad\, g} \cdot \|fg\|$$

Bibliografie

Andreescu T., Dospinescu G., Problems From The Book, XYZ Press: Allen TX, USA, 2007; pp. 235–262.

https://dgrozev.wordpress.com/2020/01/06/on-an-extremal-property-of-the-chebyshevpolynomials/

https://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html

https://www.simplilearn.com/tutorials/statistics-tutorial/lagrange-interpolation

https://mathworld.wolfram.com/LagrangeInterpolatingPolynomial.html

Mulțumesc pentru atenție